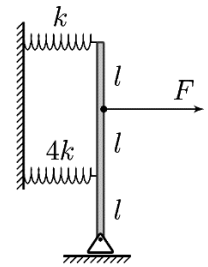


Задача 1. Эквивалентная жесткость

Две параллельные пружины соединены с закрепленным в шарнире рычагом (см. рисунок). Коэффициенты жесткости пружин равны k и $4k$. Какой эквивалентный коэффициент жесткости k_0 системы определит тянущий за нить экспериментатор? Точки крепления нити и пружин делят рычаг на три равные части. Чему будет равна сила Q , действующая на рычаг со стороны шарнира, если тянуть за нить силой F ? Куда направлена сила Q ? Отклонение рычага от вертикали можно считать небольшим.



Решение

Начертим рисунок. Из закона Гука имеем: $k_0 \cdot x = F$

$$F_1 = k \cdot x_1 \quad \text{и} \quad F_2 = 4k \cdot x_2$$

$$\operatorname{tg} \alpha = x_2/l = x/2l = x_1/3l$$

Из рисунка получаем, что:

Тогда получаем $x_2 = x/2$ и $x_1 = 3x/2$

Пусть Q - проекция силы \mathbf{Q} на ось OX .

Тогда из 2-го закона Ньютона: $F + a - F_1 - F_2 = 0$ и $Q = F_1 + F_2 - F$

И получаем:

$$F \cdot 2l = F_1 \cdot 3l + F_2 \cdot l$$

$$k_0 = 9k/4 + k = 13k/4 \quad \text{и} \quad Q = F/13,$$

т.е. вправо, как и сила F

Критерии оценки

Рисунок с расстановкой сил

Закон Гука

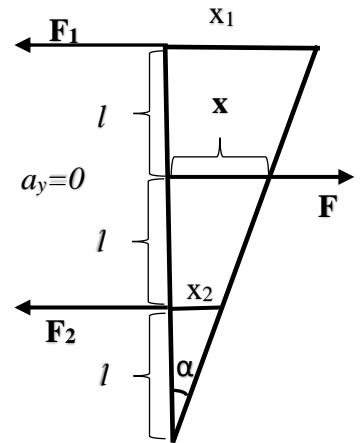
Условия кинематических связей x и x_1 , x и x_2

Записано либо правило моментов относительно шарнира

Первое условие равновесия для рычага

Эквивалентная жесткость k_0

Определение силы Q



1 балл

1+1+1 балл

1+1 балл

1 балл

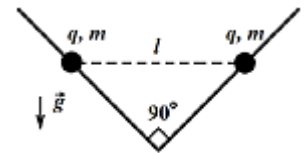
1 балл

1 балл

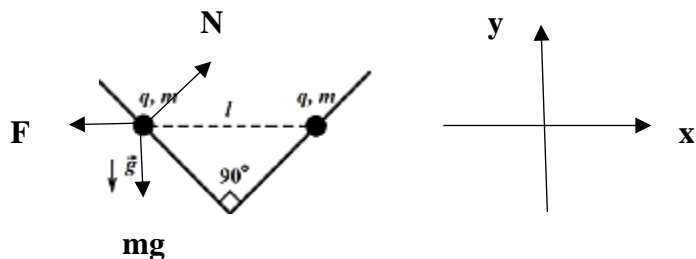
1 балл

Задача 2.

Две маленьких бусинки массой m заряжены зарядами q и q . Бусинки надеты на спицы, которые расположены в вертикальной плоскости симметрично по отношению к вертикали. Угол между спицами равен 90° (см. рис.). Сначала бусинки удерживают на расстоянии l друг от друга, а затем отпускают. Определите минимальное и максимальное расстояние между бусинками после освобождения системы. Чему равно расстояние между шариками в положении равновесия? Ускорение свободного падения g считать известным.



Решение



Пусть x – расстояние между бусинками.

В положении равновесия на каждую бусинку действует три силы: сила тяжести (вниз), сила реакции опоры (нормально к спице) и сила Кулона (горизонтально). По теореме о 3-х силах, в состоянии равновесия эти силы образуют треугольник, в данном случае прямоугольный, с углами при гипотенузе по 45° .

$$\begin{aligned} \text{(OY)} \quad N \cos 45^\circ &= mg \\ \text{(OX)} \quad F &= N \sin 45^\circ \end{aligned}$$

Тогда получаем: $mg = F$

$$kq^2/x^2 = mg \quad \text{и откуда расстояние между бусинками}$$

$$x = (kq^2/mg)^{0,5}$$

Если:

1) положение равновесия $x = l$, то l будет равно $l = (kq^2/mg)^{0,5}$.

2) начальное состояние бусинок не равновесное $x < l$, то после освобождения бусинки начнут двигаться и $x < l$ то и $l_{min} = (kq^2/mg)^{0,5}$.

1. Закон сохранения энергии в произвольный момент времени:

$$2mgh_1 + kq^2/l = 2mgh_2 + kq^2/x + 2mV^2/2$$

При наибольшем и наименьшем удалении бусинок – их скорости будут равны 0.

Тогда имеем $kq^2/l - kq^2/x = 2mg(h_2 - h_1)$

С учётом геометрии $(h_2 - h_1) = (l - x)/2$

Тогда имеем $x = kq^2/mgl$

Сокращение на $(l - x)$ даст корень $l = x$.

2. Или можно решать: $2mgl/2 + kq^2/l = 2mgl_{max}/2 + kq^2/l_{max}$, где $l/2$ – начальная высота.

Получаем квадратное уравнение:

$$mgL^2 - (mgl + kq^2/l)L + kq^2 = 0$$

$$D = (mgl + kq^2/l)^2 - 4mgkq^2 = (mgl)^2 + 2mgkq^2 + kq^2/l - 4mgkq^2 = (mgl - kq^2/l)^2$$

$$L = (mgl + kq^2/l \pm |mgl - kq^2/l|)/2mg.$$

Если сила тяжести $mg > F_{кл}$, то бусинки будут двигаться вниз, тогда $L_{max} = l$, т.е. начальное l – это наибольшее расстояние между бусинками, а $L_{min} = kq^2/mgl$ – наименьшее.

Если сила тяжести $mg < F_{кл}$, то бусинки будут двигаться вверх, тогда $L_{min} = l$, и начальное l – это наименьшее расстояние между бусинками, а $L_{max} = kq^2/mgl$ – наибольшее.

Если эти силы будут равны, то $L = l$, то это и будет и минимальное и максимальное расстояние между бусинками.

Критерии оценки

Найдено x	3 балла
Записан закон сохранения энергии	1 балл
Определено геометрическое соотношение между высотой подъёма шариков и расстоянием между шариками	1 балл
Найдено L	2 балла
Определены минимальные и максимальные расстояния между бусинками в трёх случаях	1+1+1 баллы

Задача 3.

Сухие дрова плотностью $\rho_1 = 600 \text{ кг/м}^3$, привезённые со склада, свалили под открытым небом и ничем не укрыли. Дрова промокли, и их плотность стала равной $\rho_2 = 700 \text{ кг/м}^3$. Для того, чтобы в холодную, но не морозную погоду (при температуре $T = 0^\circ\text{C}$) протопить дом до комнатной температуры, нужно сжечь в печи $M_1 = 20 \text{ кг}$ сухих дров. Оцените, сколько нужно сжечь мокрых дров, чтобы протопить дом до той же комнатной температуры? Удельная теплота парообразования воды $L = 2,3 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$, удельная теплоёмкость воды $C = 4200 \text{ Дж/(кг} \cdot ^\circ\text{C)}$, удельная теплота сгорания сухих дров $q = 10^7 \text{ Дж/кг}$.

Решение

Для того, чтобы сообщить определённое количество теплоты дому (печке, трубам и пр.) и одновременно перевести в парообразное состояние некоторое количество воды, которая содержится в мокрых дровах, требуется сжечь мокрых дров больше, чем сухих. Из трубы дым выходит с температурой, несколько превышающей 100 °С.

Для простоты примем температуру на улице равной 0 °С, а температуру выходящего дыма равной 100 °С. Тогда при сжигании массы $m_0 = 1$ кг мокрых дров нагревается на $\Delta T = 100$ °С и испаряется масса воды $m = m_0 (\rho_1 - \rho_2) / \rho_1 = 1/7$ кг. При этом сгорает сухая древесина массой $M = m_0 - m = m_0 - m_0 (\rho_1 - \rho_2) / \rho_1 = 6/7$ кг. На нагревание и испарение воды массой m затрачивается количество теплоты

$$Q_1 = m(C\Delta T + L) = m_0 (\rho_1 - \rho_2) (C\Delta T + L) / \rho_1 \approx 0,39 \cdot 10^6 \text{ Дж. (1)}$$

При сгорании массы M древесины выделяется количество теплоты

$$Q_2 = Mq \approx 8,57 \cdot 10^6 \text{ Дж. (2)}$$

Следовательно, на отопление дома при сгорании массы $m_0 = 1$ кг мокрых дров уходит количество теплоты $Q_3 = Q_2 - Q_1 \approx 8,18 \cdot 10^6$ Дж (3), то есть удельная теплота сгорания мокрых дров равна $q_3 = Q_3 / m_0 \approx 8,18 \cdot 10^6$ Дж/кг (4).

Поэтому для того, чтобы протопить дом, потребуется либо масса $M_1 = 20$ кг сухих дров, либо масса мокрых дров $M_2 = M_1 q / q_3 \approx 24,5$ кг.

Критерии оценки

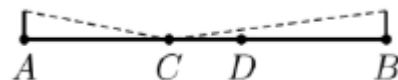
Найдены доли массы вод и сухих дров в мокрых	1 балла
Получено соотношение (1)	2 балла
Получено соотношение (2)	2 балла
Найдено соотношение (3)	2 балла
Получено соотношение (4) и верный численный ответ	3 балла

Задача 4.

Не дождавшись автобуса, пешеход пошёл пешком к следующей автобусной остановке, павильон которой был виден вдали. Через некоторое время он обнаружил, что кажущаяся высота этого павильона в $k = 1,5$ раза меньше кажущейся высоты павильона, от которого он отошёл. Пройдя ещё $L = 100$ метров, пешеход заметил, что, наоборот, павильон впереди кажется ему в $k = 1,5$ раза выше павильона позади. Найдите расстояние между остановками. Считайте, что кажущийся размер предмета обратно пропорционален расстоянию до него. Остановочные павильоны одинаковы, пешеход идёт по соединяющей их прямой.

Решение

Для решения задачи сделаем чертёж (см. рис.). Обозначим на нём буквами A и B начальную и конечную автобусные остановки, буквой C — точку, откуда остановочный павильон



В казался пешеходу в $k = 1,5$ раза ниже павильона A , буквой D — точку, откуда остановочный павильон A казался пешеходу в $k = 1,5$ раза ниже павильона B . Поскольку видимый размер павильона обратно пропорционален расстоянию до него, то справедливы следующие пропорции:

$$\frac{AC}{CD + DB} = \frac{1}{k} \text{ и } \frac{DB}{AC + CD} = \frac{1}{k}.$$

Из этого получаем:

$$\frac{AC}{AC + CD + DB} = \frac{1}{k + 1} = \frac{AC}{AB}, \quad \frac{DB}{AC + CD + DB} = \frac{1}{k + 1} = \frac{DB}{AB}.$$

Однако $CD = AB - AC - DB$. Т.е. имеем:

$$\frac{CD}{AB} = 1 - \frac{AC}{AB} - \frac{DB}{AB} = 1 - \frac{1}{k + 1} - \frac{1}{k + 1} = \frac{k - 1}{k + 1}.$$

А так как $L = CD$, то таким образом получаем:

$$AC = \frac{k + 1}{k - 1} L = 500 \text{ м.}$$

Критерии оценки

Получены соотношения для видимого размера павильона	4 балла
Указано соотношение расстояний	2 балл
Найдено выражение для искомого расстояния	4 балла

Задача 5.

Экспериментатор Глюк для испытаний деталей на износ при трении использовал установку, в которой цилиндрическая деталь вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью. На боковую поверхность детали с некоторой силой прижимается неподвижное контртело. В таком случае возникает трение скольжения, а установленные датчики регистрируют зависимость коэффициента трения от времени испытаний. Из-за трения детали о контртело происходит нагрев пары трения. Данные испытаний Глюк занес в таблицу, где дана зависимость коэффициента трения от времени испытаний. Исходя из условий, что сила прижима составляла на всем интервале 10 Н, а линейная скорость точек поверхности образца 1,5 м/с, найдите на сколько нагрелась стальная деталь массой 20 г в ходе испытаний, если коэффициент потерь тепла в системе равен 0,75. Удельная теплоемкость железа 460 Дж/(кг·°С).

Время, с	0	20	30	40	50	60
Коэффициент трения	0,8	0,7	0,6	0,6	0,6	0,7

Решение

Так как в ходе испытаний изменяется коэффициент трения $F_{тр}$, то и сила трения так же будет зависеть от времени. Построим график зависимости силы трения $F_{тр}$ от пройденного пути. Для этого пересчитаем время испытания в путь скольжения $S=vt$, и найдем значения силы трения с учетом силы прижима и табличными данными коэффициента трения.

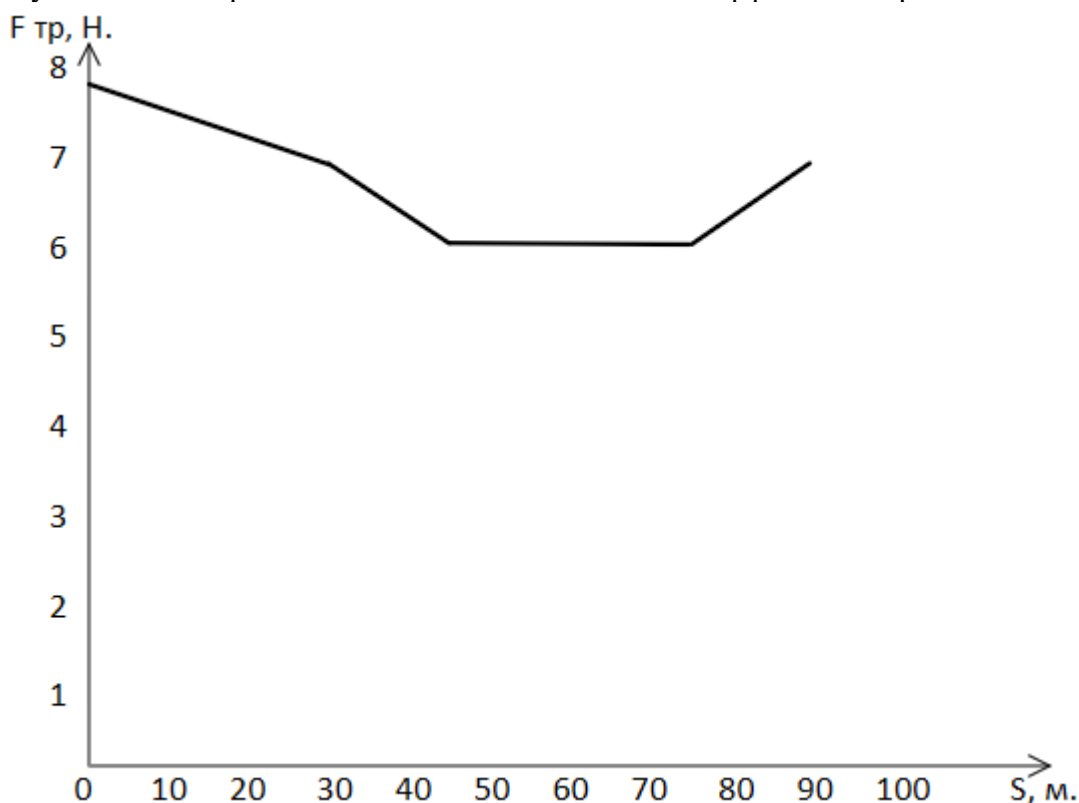


Рис. Зависимость силы трения от пути скольжения

Найдем выделенное тепло в системе как площадь под графиком и получим значение 600 Дж. Можно считать площадь по среднему значению коэффициента трения на данном отрезке времени.

Так как на нагрев образца пойдет лишь часть тепла, то с учетом теплотерь уравнение теплового баланса имеет вид $(1 - \eta)Q = Cmt\Delta T$. Подставляя полученные данные, найдем, что температура образца увеличится на:

$$\Delta T = (1 - \eta)Q / Cmt = 16,3 \text{ }^\circ\text{C}.$$

В случае правильного решения задачи без графика баллы не снижаются.

Критерии оценивания

Построен график в координатах сила трения и пути	4 балла
Найдено выделившееся количество теплоты как площадь под графиком	2 балла
Составлено уравнение теплового баланса	2 балла
Найдено значение повышения температуры	2 балла